Les polynômes du second degré (1)

1 Présentation générale

Définition

On appelle **polynôme du second degré** une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Remarques On parle aussi de trinôme du second degré ou même, par raccourcit, de trinôme.
Si $a = 0$, on retrouve l'expression littérale d'une fonction affine.

Exemples

- $3x^2 - 9x + 1$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$, $b = -9$ et $c = 1$.
- $-x^2 - 8$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = -8$.
- $(6x - 7)(2x + 3)$ est une fonction polynôme du second degré également.
- $\frac{2}{3}x^6 - 2x^3 + 2x - 1$ n'est pas une fonction polynôme du second degré. Elle est de degré 6.

2 Forme canonique

Propriété - Définition

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

C'est la **forme canonique** du polynôme $ax^2 + bx + c$.
On peut aussi écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b - 4ac}{4a}$.

Démonstration Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

3 Représentation graphique et variations

Propriétés

On considère le polynôme ax^2+bx+c de forme factorisée $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \neq 0$.

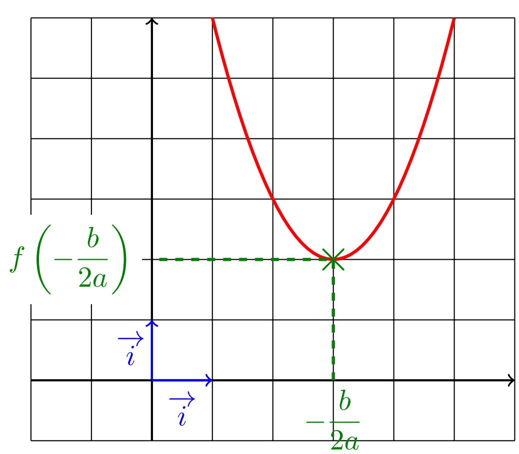
- Si $a > 0$, f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{-b}{2a}\right]$ puis croissante sur $\left]-\frac{b}{2a}\,;\,+\infty\right]$.
  f admet donc un minimum atteint en $x=\alpha$ et la valeur de ce minimum est $f(\alpha)=\beta$.

- Si $a < 0$, f est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{-b}{2a}\right]$ puis décroissante sur $\left]-\frac{b}{2a}\,;\,+\infty\right]$.
  f admet donc un maximum atteint en $x=\alpha$ et la valeur de ce maximum est $f(\alpha)=\beta$.

Remarque On peut aussi retenir les tableaux de variations suivants :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	



Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘