Correction des exercices sur les matrices (généralités)

> Opérations sur les matrices

Exercice n°1

$$10I - 7J = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ -21 & -18 \end{pmatrix}$$

Exercice n°2

1. $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $2A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}$.

Exercice n°3

1. $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $2A - 3B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 8 & 6 & -14 \\ -3 & -5 & 19 \end{pmatrix}$.

Exercice n°4

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 1 \times 1 + 0 \times (-2) \\ 1 \times 3 + 3 \times 1 - 1 \times (-2) \\ 0 \times 3 - 4 \times 1 + 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Exercice n°5

a. $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice n°6

1. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

> Puissance de matrices

Exercice n°7

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Exercice n°8

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A^{101} = A^{2\times 50+1} = A^{2\times 50} \times A = (A^2)^{50} \times A = I_3^{50} \times A = A$.

Exercice n°9

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4A$.

2. Il semblerai que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = 2^{n-1}A$.

3. **Initialisation**

   Pour $n = 1$, $2^{n-1}A = 2^0A = A$.
   La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

   Hérédité

   Supposons que pour un entier naturel n, on a $A^n = 2^{n-1}A$.

   $A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A \times A = 2^{n-1} \times A^2 = 2^{n-1}2A = 2^nA$
   La proposition est donc héréditaire.

   Conclusion

   La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice n°10

1. $A^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$.

2. Il semblerait que pour tout entier naturel n non nul, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

3. **Initialisation**

$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. D'autre part, si $n = 1$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n non nul, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice n°11

1. **Initialisation**

$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n non nul, la proposition soit vraie.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12 & -16+12 \\ 12-9 & -12+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

2. **Initialisation**

Pour $n = 0$: $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 2^0 - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^0 = I_2$.

La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n, la proposition soit vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^n + 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2 \times 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

> Inverse de matrices

Exercice n°12

1. $7 \times 2 - 3 \times 5 = -1 \neq 0$. Il s'agit donc d'une matrice inversible.
   $6 \times 2 - 3 \times 4 = 0$ Ce n'est donc pas une matrice inversible.

2. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. B est donc la matrice inverse de A.

Exercice n°13

$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. B est donc la matrice inverse de A.

Exercice n°14

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ puis $A^2 + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
2. On a $A^2 + A = 6I_3$ soit encore $\frac{1}{6}(A^2 + A) = I_3$ ou bien $A\left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{6}I_3\right) = I_3$.
3. La matrice inverse de A est donc la matrice définie par $\frac{1}{6}A + \frac{1}{6}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Exercice n°15

On cherche quatre réels a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cela revient à $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On doit donc résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} 2c & = & 1 \\ 2d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{array}\right.$

On obtient ainsi $\left\{\begin{array}{rcr} c & = & \dfrac{1}{2} \\ d & = & 0 \\ a & = & -1 \\ b & = & 1 \end{array}\right.$

Finalement, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n°16

On peut utiliser la propriété suivante : si $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a. A l'aide de cette propriété, on trouve comme matrice inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$

b. A l'aide de cette propriété, on trouve comme matrice inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

c. A l'aide de cette propriété, on trouve comme matrice inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$