Exercices sur les suites (1)

> Utiliser le raisonnement par récurrence

Exercice n°1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}u_n$.

Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

Exercice n°2

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Montrer que pout tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a $1! + 2! + ... + (n-1)! \leqslant n!$.

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^2 + x + 0,5$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que cette suite est croissante et majorée par 1.

Exercice n°4

Montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul que $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$.

Exercice n°5 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$.

Montrer que la suite est croissante et majorée par 7.

Exercice n°6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
3. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$. Montrer que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = (n+1)^2$.

> Etudier la convergence d'une suite

Exercice n°8

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n$ quand $n \to +\infty$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(n^2 + 3\right)$ quand $n \to +\infty$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2}{-n^2 - 3}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice n°9

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 3n + 1$ quand $n \to +\infty$.
2. A l'aide d'un algorithme, déterminer à partir de quel rang n a-t-on $u_n \geqslant 10^6$.

Exercice n°10

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^3 - 4n + 2$ quand $n \to +\infty$.
2. A l'aide d'un algorithme, déterminer à partir de quel rang n a-t-on $u_n \geqslant 10^6$.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2n + 3}{-n - 5}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice n°11

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n - 3\sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - 5n + 1$ quand $n \to +\infty$.
3. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{3n^2 + n}{n + 3}$ quand $n \to +\infty$.
4. Déterminer la limite de la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $x_n = \sqrt{n + 2} - \sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice n°12

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{5} + 7 - \dfrac{3n}{n^2 + 4}$ quand $n \to +\infty$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{6n^2 - 3n + 7}{n^2 + n + 1}$ quand $n \to +\infty$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n^2 - 1}{5n + 4}}$ quand $n \to +\infty$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2\left(\sqrt{3 - \dfrac{2}{n}} - \sqrt{3}\right)$ quand $n \to +\infty$.