Second degré : approfondissement

Somme et produit des racines

Propriété

Soit P le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. Si le discriminant noté Δ de P est strictement positif et si on note x_1 et x_2 les deux racines de P on a alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercice

1. Démontrer les deux formules de la propriété.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$. Sachant que 2 est une racine de f, déterminer la valeur de l'autre racine.
3. Déterminer un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$ du second degré sachant qu'il admet deux racines distinctes dont la somme vaut 3 et le produit -10.

Solution

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{b^2_{\Delta}}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

2. Notons x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme. On a $x_1 = 2$. On sait que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ce qui donne $2 + x_2 = -\frac{4}{2} = -2$. On a également $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ce qui donne $2x_2 = \frac{-16}{2} = -8$.
   Peu importe l'équation choisie, on trouve $x_2 = -4$.

3. On utilise la propriété sur la somme et le produit des deux racines :

   $$4\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 & = & \frac{c}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3 & = & -\frac{b}{a} \\ -10 & = & \frac{c}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3a & = & b \\ -10a & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -3 \\ c & = & -10 \end{array}\right.$$

   Il s'agit donc du polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 3x - 10$.