



Algorithme d'Euclide

Rappels

Propriété

On considère deux entiers naturels non nuls a et b avec $b < a$. On appelle r le reste de la division euclidienne de a par b . L'ensemble des diviseurs communs à a et b est confondu avec celui des diviseurs communs à b et r .

Lorsque b ne divise pas a , en appliquant cette propriété jusqu'à l'obtention d'un reste nul, on obtient le PGCD de a et de b comme étant le dernier reste non nul. C'est ce qu'on appelle l'**algorithme d'Euclide**.

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et soit D leur PGCD.

Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = D$.

Théorème de Bezout

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Exercice n°1 Soit $a = 266$ et $b = 224$.

1. Calculer $\text{PGCD}(a; b)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.
2. Déterminer ensuite deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = \text{PGCD}(a; b)$.
3. Ecrire un programme Python qui permet de calculer le PGCD de deux entiers a et b .

Exercice n°2

1. Ecrire un programme Python qui permet de déterminer le couple d'entiers relatifs $(u; v)$ dans le théorème de Bezout.
2. Tester ce programme pour les entiers 59 et 27.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $266 = 1 \times 224 + 42$

$$224 = 5 \times 42 + 14$$

$$42 = 3 \times 14 + 0$$

Le PGCD de 266 et de 224 est donc 14.

2. D'après l'avant dernière ligne, $14 = 224 - 5 \times 42$ (1)

Or $42 = 266 - 1 \times 224$ donc (1) devient $14 = 224 - 5(266 - 1 \times 224) = -5 \times 266 + 6 \times 224$.

Les entiers recherchés sont donc $u = -5$ et $v = 6$.

3. Voici le programme de l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD de deux entiers a et b :

```
1 def euclide(a,b):
2     while b!=0:
3         r=a%b
4         a=b
5         b=r
6     return a
```

```
>> euclide(266,224)
```

```
>> 14
```

Exercice n°2

1. Voici le programme Python qui détermine un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que : $au + bv = 1$ avec a et b premiers entre eux :

```
1 def Bezout(a,b):
2     r=0
3     u=0
4     while r!=1:
5         u=u+1
6         if b>0:
7             r=a*u%b
8         else:
9             r=a*u%(-b)
10    v=int((1-a*u)/b)
11    return u,v
```

2.

```
>> Bezout(59, 27)
```

```
>> 11, -24
```