Produit scalaire et orthogonalité

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition : Produit scalaire dans l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soient A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
Il existe un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C et on appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque Toutes les propriétés du produit scalaire du plan vues en première s'appliquent ici.
Les autres expressions du produit scalaire sont également utilisables (formule du cosinus, des normes et projeté orthogonal).

Propriétés : propriétés du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Soit λ un réel.

- Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{u}.\vec{v}$
- Identité remarquable : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- Formules de polarisation :

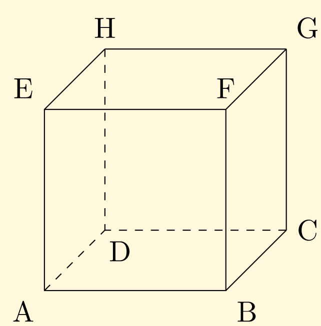
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \qquad \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \qquad \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Propriété : orthogonalité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exemple

On considère le cube ABCDEFGH de côté a ci-contre.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{DG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AF}} \text{ (par égalité de vecteur)}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ (par projection orthogonale)}\\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AB}\\ &= a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{FB}}\\ &= 0 \text{ (car } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{FB}} \text{ sont orthogonaux)}\end{aligned}$$

Définition : Repère orthonormé

Soit (O, I, J, K) un repère de l'espace.
On dit que ce repère est **orthonormé** quand les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et que les distances OI, OJ et OK sont toutes égales à 1.

Propriété : Coordonnées dans l'espace

Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et soient x, y et z trois réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+k\vec{k}$.
Le triplet $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ représente les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{u}$ alors $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ représente également les coordonnées du point M dans la base $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Propriété : Produit scalaire et coordonnées

On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans ce repère.

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Propriété : Distance entre deux points

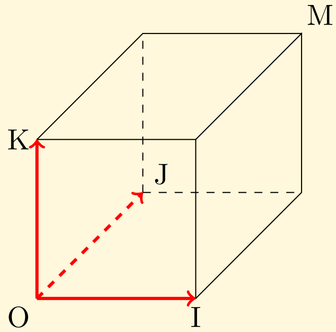
Soit (O, I, J, K) un repère orthonormé. Soit A et B deux points du plan dont les coordonnées respectives sont $(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ et $(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B}\,;z_\mathrm{A})$ dans ce repère.
La distance AB est donnée par la formule :

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}$$

Exemple

Dans le cube ci-dessous, les arêtes [OI], [OJ] et [OK] sont perpendiculaires et de même longueur égale à 1.
On peut donc définir le repère orthonormé (O, I, J, K) que l'on peut aussi noter $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{OJ}},\overrightarrow{\mathrm{OK}})$.
Dans ce repère, le point M a donc pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$ et on a $\mathrm{I}(1\,;0\,;0)$.

Ainsi : $\mathrm{IM}=\sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$



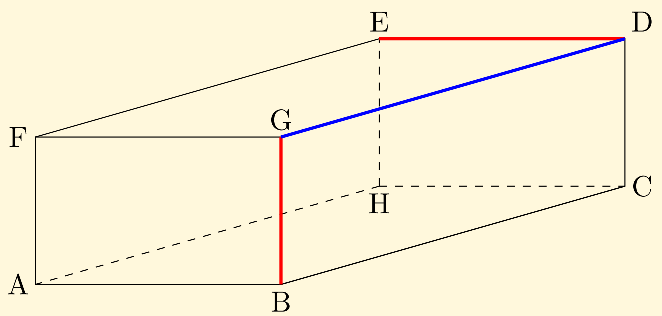
2 Orthogonalité

Définition : Droites orthogonales

On dit que deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.

Exemple

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous.



Les droites (FG) et (BG) sont perpendiculaires.

La droite (DC) est parallèle à (GB). La droite (DC) est perpendiculaire à la droite (ED). Donc les droites (ED) et (BG) sont orthogonales.

Remarques Il faut bien faire la différence entre perpendiculaire et orthogonale.

- Deux droites perpendiculaires sont forcément coplanaires ET sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonale. Attention, la réciproque n'est pas vraie. En effet, deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires et sécantes, comme on a pu le voir dans le précédent exemple.

Définition : Orthogonalité d'un plan et d'une droite

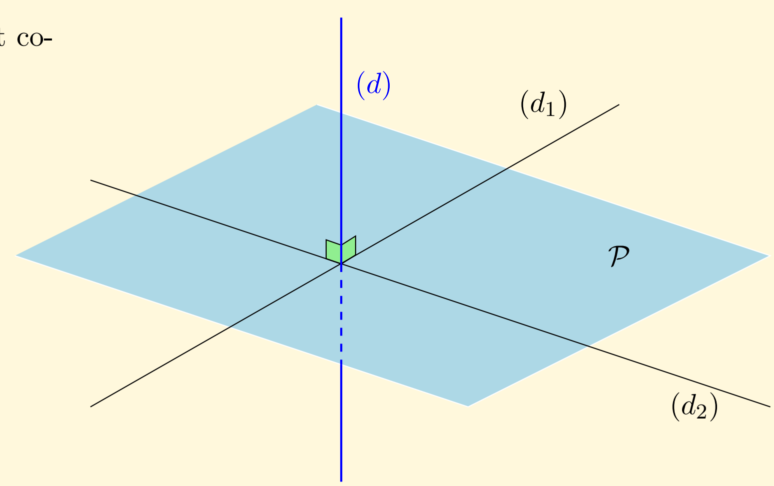
Soit (d) une droite et $\mathcal{P}$ un plan, tous deux de l'espace.
(d) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si (d) est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Exemple

Sur le plan $\mathcal{P}$ ci-contre, les droites (d_1) et (d_2) sont coplanaires et sécantes.

La droite (d) est perpendiculaire à (d_1).
De plus, la droite (d) est perpendiculaire à (d_2).

La droite (d) est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$.



Propriété : Droite orthogonale à un plan

Soit (d) une droite et soit $\mathcal{P}$ un plan, tous deux de l'espace.
Si (d) est orthogonale à $\mathcal{P}$ alors elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.

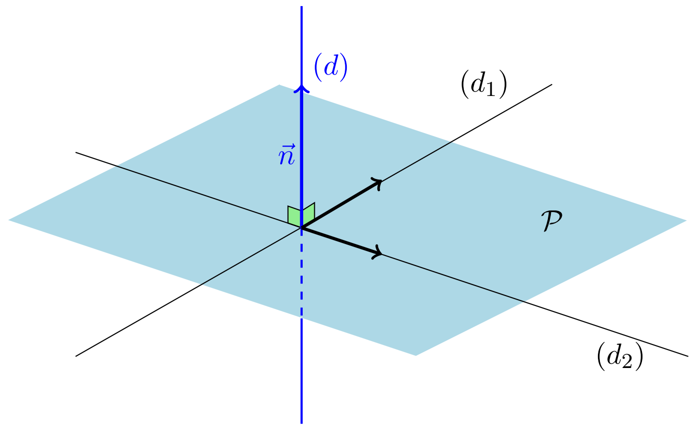
3 Vecteur normal à un plan

Définition : Vecteur normal à un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.
On appelle **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ tout vecteur directeur $\vec{n}$ d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Propriété : Vecteur normal à un plan

Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.
$\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$



Propriété : Plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

Soit A un point et soit $\vec{n}$ un vecteur, tous deux de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\text{AM}}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple

On considère les trois points de l'espace A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
On souhaite déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABC). On a donc $\vec{n}.\overrightarrow{\text{AB}} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{\text{AC}} = 0$. Puisque $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cela revient à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a+b+3c &=& 0 \\ a-2b &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2\times 2b+b+3c &=& 0 \\ a &=& 2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3b+3c &=& 0 \\ a &=& 2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& c \\ a &=& 2b \end{array}\right.$$

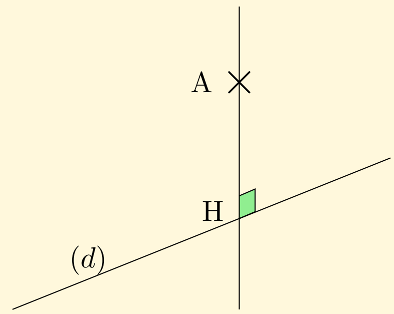
On peut donc choisir une valeur pour le réel b. Prenons par exemple $b = 3$ on obtient alors $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. On peut multiplier toutes les coordonnées par un même réel λ, $\vec{n}$ sera un vecteur normal à (ABC).

4 Projection orthogonale

Définition : Projeté orthogonal d'un point sur une droite

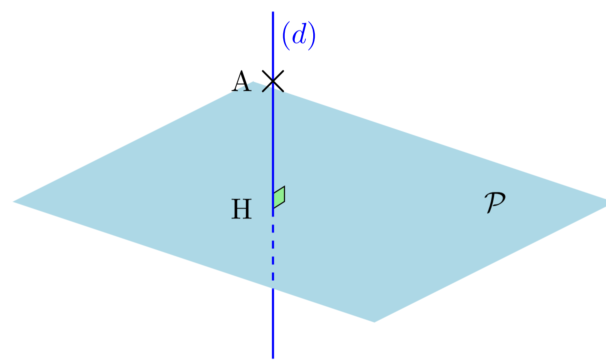
Soit A un point et soit (d) une droite, tous deux de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal de A sur (d)** le point H appartenant à (d) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à (d).



Définition : Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soit A un point et soit $\mathcal{P}$ un plan, tous deux de l'espace.
On appelle **projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$** le point H appartenant à $\mathcal{P}$ tel que la droite (AH) soit orthogonale à $\mathcal{P}$.



Propriété : Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soit A un point et soit $\mathcal{P}$ un plan, tous deux de l'espace.
Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

Démonstration

Soit A un point et soit $\mathcal{P}$ un plan, tous deux de l'espace.

Supposons qu'il existe un point K de $\mathcal{P}$ encore plus proche de A que ne l'est le point H.
On a $\text{KA} \leqslant \text{HA}$ car K est le point de (d) le plus proche de A. Par passage au carré, on obtient alors $\text{KA}^2 \leqslant \text{HA}^2$.
or (AH) est orthogonal à $\mathcal{P}$ donc (AH) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$, en particulier (HK).
On peut donc utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle AHK rectangle en H. On obtient alors l'égalité :

$$\text{AH}^2 + \text{HK}^2 = \text{AK}^2$$

En l'inégalité $\text{KA}^2 \leqslant \text{HA}^2$ on arrive alors à $\text{AH}^2 + \text{HK}^2 \leqslant \text{AH}^2$. ce que l'on peut simplifier par $\text{AH}^2 \leqslant 0$.
Or la seul cas où cette inégalité est possible est lorsque $\text{K} = \text{H}$.
H est donc bien le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.