

# Correction des exercices sur les variables aléatoires

## > Loi de probabilité

### Exercice n°1

|              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$        | 5             | 0,5           | 1,5           |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{2}{6}$ |

On vérifie que la somme des  $P(x = x_i)$  est bien égale à 1 :  $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$ .

### Exercice n°2

1.

|              |               |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$        | 1             | 2             | 3             | 4             |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

2.

|              |               |               |               |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $y_i$        | 0             | 2             | 3             |
| $P(Y = x_i)$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

### Exercice n°3

1. Puisque la somme de tous les  $P(X = x_i) = 1$  on a  $P(X = 6) = 1 - 0,05 - 0,12 - 0,15 - 0,23 - 0,17 = 0,28$ .

|              |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|
| $x_i$        | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
| $P(X = x_i)$ | 0,05 | 0,12 | 0,15 | 0,23 | 0,17 | 0,28 |

2. C'est que la face obtenue porte un entier inférieur ou égal à 3.

3.  $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,05 + 0,12 + 0,15 = 0,32$ .

4.  $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,32 = 0,68$ .

### Exercice n°4

1.  $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

2.  $P(X \leq 1) = P(X = -2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exercice n°5

1.  $P(X = 2) = 0,34 - 0,275 = 0,065$ . La probabilité de tomber sur le 2 est donc de 0,065.
2.  $P(X = 5) = 0,84 - 0,6 = 0,24$ .
3.  $P(X \leq 3) = 0,51$ . Donc  $P(X > 3) = 1 - 0,51 = 0,49$ .
4.  $P(3 < X \leq 6) = P(X > 3) = 0,49$ .

## &gt; Espérance, variance et écart-type

Exercice n°6

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} + 0,5 \times \frac{3}{6} + 1,5 \times \frac{2}{6} = \frac{19}{12}.$$

L'espérance n'est pas égale à 0 il ne s'agit donc pas d'un jeu équitable. On a davantage de chance de gagner que de perdre, l'espérance étant positive.

Exercice n°7

1. En prenant en compte le prix d'un billet, les potentiels gains sont  $-2\text{€}$ ;  $98\text{€}$ ;  $148\text{€}$  et  $498\text{€}$ .

On obtient la loi de probabilité suivante :

|              |                     |                  |                  |                  |
|--------------|---------------------|------------------|------------------|------------------|
| $x_i$        | $-2$                | $98$             | $148$            | $498$            |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1992}{2000}$ | $\frac{5}{2000}$ | $\frac{2}{2000}$ | $\frac{1}{2000}$ |

$$2. E(X) = -2 \times \frac{1992}{2000} + 98 \times \frac{5}{2000} + 148 \times \frac{2}{2000} + 498 \times \frac{1}{2000} = -\frac{27}{20}.$$

Puisque l'espérance n'est pas égale à 0, l'expérience n'est pas équitable.

3. Soit  $x \neq 0$  le nombre total de billets. On souhaite que l'espérance soit égale à 0 autrement dit :

$$498 \times \frac{1}{x} + 148 \times \frac{2}{x} + 98 \times \frac{5}{x} + (-2) \times \frac{x-8}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1284 + (-2)(x-8)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1284 + (-2)(x-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1300 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 650 \quad \text{Pour que cette loterie soit équitable, il faut que le nombre total de billets soit de 650.}$$

**Exercice n°8**

1. On ne tenant pas compte du prix des billets, on obtient la loi de probabilité de  $X$  suivante :

|              |                  |                  |                  |                 |
|--------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| $x_i$        | 0                | 10               | 20               | 50              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{68}{100}$ | $\frac{20}{100}$ | $\frac{10}{100}$ | $\frac{2}{100}$ |

2.  $E(X) = 0 \times \frac{68}{100} + 10 \times \frac{20}{100} + 20 \times \frac{10}{100} + 50 \times \frac{2}{100} = 5.$

Le gain moyen d'un joueur est de 5€.

3.  $V(X) = \frac{68}{100} \times (0 - 5)^2 + \frac{20}{100} \times (10 - 5)^2 + \frac{10}{100} \times (20 - 5)^2 + \frac{2}{100} \times (50 - 5)^2 = 85.$

Puis  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{85} \approx 9,2$

**Exercice n°9**

1. Fixons une partie où il y a le 0. Il y a donc  $< 0; 0 >$  puis  $< 0; 1 >$  et ainsi de suite jusqu'à  $< 0; 6 >$ . Cela fait donc 7 dominos.

Fixons maintenant une partie où il y a le 1. On raisonne de la même façon mais on ne compte pas le domino  $< 0; 1 >$  déjà compté précédemment. Cela donne donc 6 dominos.

Fixons maintenant une partie où il y a le 2. On raisonne de la même façon mais on ne compte pas le domino  $< 0; 2 >$  ni le  $< 1; 2 >$  déjà compté précédemment. Cela donne donc 5 dominos.

Et ainsi de suite. Cela donne donc  $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$  dominos.

2. Il y a 7 doubles dans le jeu. La probabilité que Jean-Kevin pioche un double est donc de  $\frac{7}{28}$  soit  $\frac{1}{4}$ .

3. Les dominos favorables sont

$< 0; 0 >$        $< 0; 3 >$        $< 0; 6 >$        $< 1; 2 >$        $< 1; 5 >$        $< 2; 4 >$

La probabilité est donc de  $\frac{6}{28}$  soit  $\frac{3}{14}$ .

4. On obtient la loi de probabilité suivante :

|              |                 |                |                |                |                |                |                |                |
|--------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_i$        | -1              | 0              | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{21}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ |

5.  $E(X) = -1 \times \frac{21}{28} + 0 \times \frac{1}{28} + 1 \times \frac{1}{28} + 2 \times \frac{1}{28} + 3 \times \frac{1}{28} + 4 \times \frac{1}{28} + 5 \times \frac{1}{28} + 6 \times \frac{1}{28} = 0.$

6.  $V(X) = \frac{21}{28} \times (-1 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (0 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (1 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (2 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (3 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (4 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (5 - 0)^2 + \frac{1}{28} \times (6 - 0)^2 = 4.$

Puis  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2.$