

Primitives, équations différentielles

1 Equation différentielle et primitives

Définition : équation différentielle

On appelle **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur I qui vérifient cette équation.

Remarque

Souvent, l'inconnue dans une équation différentielle est notée y .

Exemple

En classe de première, nous avons déjà rencontré une équation différentielle :

$$y' = y$$

On cherche une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que sa dérivée soit égale à elle-même. Il s'agit de la fonction exponentielle.

Définition : primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle **primitive** de f sur I , que l'on note F , une solution de l'équation différentielle $y' = f(x)$. On note alors :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = f(x) = 2x$.

La fonction $F_1 : x \mapsto x^2 + 42$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F_1'(x) = f(x) = 2x$.

Remarque

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Dire que F est une primitive de f revient à dire que f est la dérivée de F .

Théorème

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I .
 Toute fonction G de la forme $G = F + k$, $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f .
 On dit que deux primitives d'une même fonction continue diffèrent d'une constante.

Démonstration

Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur I .

On a alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

Donc $F'(x) = G'(x)$ autrement dit $F'(x) - G'(x) = 0$ soit $(F - G)'(x) = 0$.

La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur cet intervalle. Notons k cette constante.

Pour tout x dans I , on a $F(x) - G(x) = k$ autrement dit $F(x) = G(x) + k$.

Théorème

Tout fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Démonstration

Voir la leçon du chapitre intégration.

Primitives des fonctions usuelles

On prendra ici $k = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Linéarité

Soit F une primitive d'une fonction f et soit g une primitive d'une fonction G . Soit k un réel.

$F + G$ est une primitive de $f + g$.

kF est une primitive de kf .

Exemple : application des deux dernières propriétés

On souhaite déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x^3 - 2x + \frac{1}{x}$.

Une primitive de $x \mapsto 3x^3$ est $x \mapsto \frac{3}{4}x^4$.

Une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(x)$.

Ainsi, une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^2 + \ln(x)$. Toutes les primitives de cette fonction f sont de la forme $F(x) + k$ où k est un nombre réel.

Théorème : primitive vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Le couple $(x_0; y_0)$ est appelé condition initiale.

Exemple

On cherche la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ telle que $F(2) = 3$.

Une primitive de la fonction f est $x \mapsto x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$.

On souhaite que $F(2) = 3$. Or $F(2) = 4 + k = 3$ ce qui revient à $k = -1$.

La primitive recherchée est donc $x \mapsto x^2 - 1$.

Propriétés : primitives de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Primitive
$u' u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u > 0$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$

Fonction	Primitive
$u' e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Exemple

On souhaite déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x+1}$.

$f(x) = \frac{1}{4}4e^{4x+1}$. On peut donc utiliser la formule $u'e^u$ du tableau en posant $u(x) = 4x + 1$.

On trouve ainsi $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1}$.

2 Equation différentielle linéaire du premier ordre

Théorème : équation homogène $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Les solutions de l'équation différentielles $y' = ay$ sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$$

Démonstration

Soit y la fonction définie par $y(x) = ke^{kx}$.

On a $y'(x) = kae^{ax} = ay(x)$.

Donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto y(x) = ke^{ax}$ sont bien solutions de ce type d'équation différentielle.

Réciproquement, supposons que g soit une solution de cette équation différentielle.

Posons $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$$

Puisque g est solution de l'équation différentielle, on a $g' = ag$ donc :

$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$$

La fonction h est donc constante. Il existe ainsi un réel k tel que pour tout réel x , $h(x) = k$. Cela revient à

$$g(x)e^{-ax} = k$$

Et donc

$$g(x) = ke^{ax}$$

Exemple

On souhaite résoudre l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$ avec $y(1) = 2$.

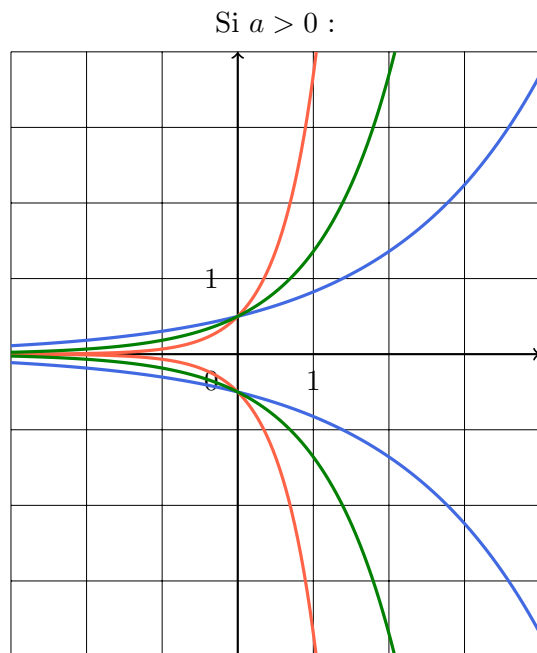
On se ramène à une équation du type $y' = ay$. On obtient $y' = -\frac{5}{3}y$. D'après le précédent théorème, les solutions sont du type $ke^{-\frac{5}{3}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Puisque $y(1) = 2$ on a $ke^{-\frac{5}{3}} = 2$ soit $k = 2e^{\frac{5}{3}}$.

Ainsi, $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}}e^{-\frac{5}{3}x}$.

Exemple : allure des courbes représentatives

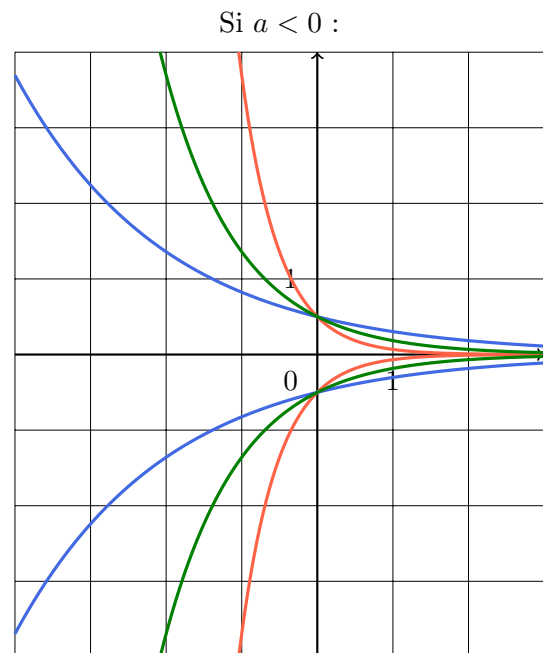
On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ selon le signe de a et le signe de k .



Au dessus de l'axe des abscisses, $k > 0$.

Au dessous de l'axe des abscisses, $k < 0$.

En rouge, $a = 2$, en bleu, $a = \frac{1}{2}$ et en vert $a = 1$.



Au dessus de l'axe des abscisses, $k > 0$.

Au dessous de l'axe des abscisses, $k < 0$.

En rouge, $a = -2$, en bleu, $a = -\frac{1}{2}$ et en vert $a = -1$.

Théorème : équation linéaire $y' = ay + b$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$$

Exemple

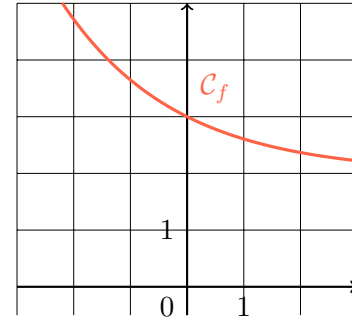
On souhaite déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = -0,5y + 1$ telle que $f(0) = 3$.

On sait que f est de la forme

$$f : x \mapsto f(x) = ke^{-0,5x} + -\frac{1}{-0,5} = ke^{0,5x} + 2.$$

Puisque $f(0) = 3$, on a $k + 2 = 3$ soit $k = 1$.

Finalement, $f(x) = e^{-0,5x} + 2$.

**Propriété**

Soit f et g deux solutions de l'équation $y' = ay + b$.

La fonction $f + g$ est également solution de cette équation différentielle, tout comme la fonction λf , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété : équation de la forme $y' = ay + f(x)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto ke^{ax} + g(x), k \in \mathbb{R}$$

où g est une solution particulière de cette équation et où ke^{ax} est solution de $y' = ay$.

Méthode : Résoudre une équation de la forme $y' = ay + f(x)$

- (1) On cherche d'abord une solution particulière y_0 .
- (2) On détermine ensuite l'ensemble des solutions en se ramenant à une équation homogène $y' = ay$.

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = 1 - 6x$.

1. Montrer que $f : x \mapsto 3x + 1$ est une solution particulière de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

1. $f'(x) = 3$. Puis $f'(x) - 2f(x) = 3 - 2(3x + 1) = -6x + 1$.
 f est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $y' - 2y = 0$ est équivalent à $y' = 2y$. Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme ke^{2x} , $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{2x} + 3x + 1$, $k \in \mathbb{R}$.