

Correction des exercices sur les nombres complexes (2)

> Module et argument d'un nombre complexe, affixe d'un point

Exercice n°1

- a. $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}} = 2$; $\cos(\theta) = \frac{-1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Un argument de z est donc $-\frac{\pi}{6}$.
- b. $|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$; $\cos(\theta) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Un argument de z est donc $-\frac{\pi}{4}$.
- c. $z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} = \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
 $-\sqrt{2}$ est un réel négatif, son argument est donc π (2π).
 De plus, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (2π).

Exercice n°2

1. $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.
2. D'après les coordonnées de O , A et A' , on a $OA' = A'A = 2$ donc le triangle OAA' est isocèle en A' .
 Puisque (AA') est parallèle à (Oy) et que (OA') est parallèle à (Ox) , alors les droites (AA') et (OA') sont perpendiculaires, ce qui veut dire que le triangle OAA' est rectangle en A' .

On en déduit donc que $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$ (2π).

Un argument de z_A est donc $\frac{\pi}{4}$.

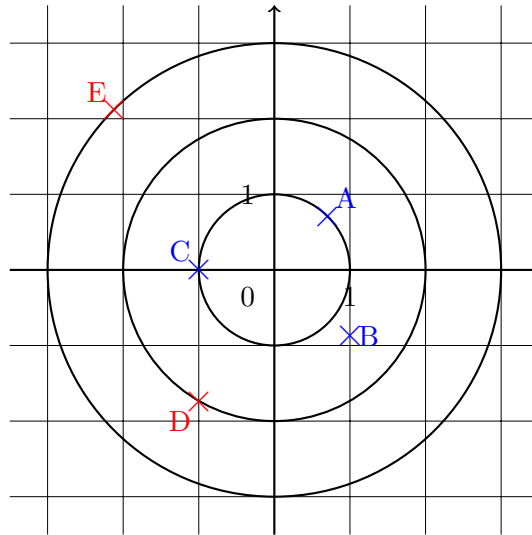
3. $|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$
 $|z_C| = \sqrt{2^2} = 2$
 $|z_B - z_C| = |-\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$.

On a donc $OB = OC = BC$: le triangle BOC est donc équilatéral.

4. $\arg(z_B) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice n°3

1. $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$ (2π); $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}$ (2π); $\arg(z_C) = \pi$ (2π).
2. D appartient au cercle de rayon 2 puisque $|z_D| = 2$.
 E appartient au cercle de rayon 3 puisque $|z_E| = 3$.

**Exercice n°4**

a. $|-1 + i| = \sqrt{2}$

$$\text{Donc } -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Donc } \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} (2\pi). \text{ Ainsi, } \arg((-1 + i)^5) = 5 \times \frac{3\pi}{4} (2\pi) = -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\text{Ainsi, } (-1 + i)^5 = \sqrt{2}^5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

b. $|\sqrt{3} - i| = 2$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right).$$

$$\text{Donc } \arg(\sqrt{3} - i) = \frac{-\pi}{6} (2\pi). \text{ Ainsi, } \arg((\sqrt{3} - i)^4) = 4 \times \frac{-\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} (2\pi).$$

$$\text{Donc } (\sqrt{3} - i)^4 = 2^4 \left(\cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right) = 16 \left(\cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right)$$

c. $|(\sqrt{2} - 1)i| = \sqrt{2} - 1$ et $\arg((\sqrt{2} - 1)i) = \frac{\pi}{2}$

$$|1 - i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Donc } \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}.$$

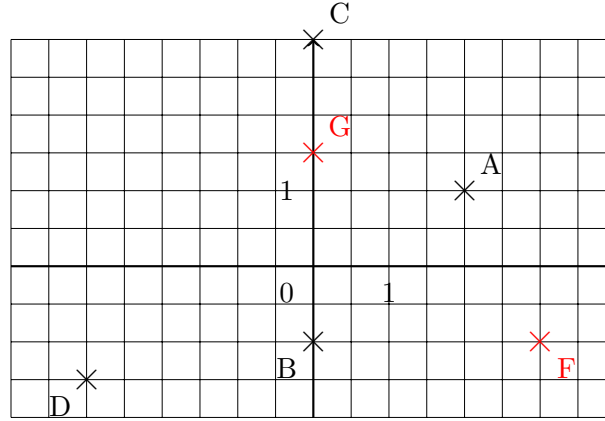
$$\text{Ainsi } |z| = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Donc } z = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

Exercice n°5

1. $z_A = 2 + i$, $z_B = -i$, $z_C = 3i$ et $z_D = -3 - \frac{3}{2}i$.

2. Placement des points :



3. On note z_I l'affixe de ce milieu : $z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{2 + i - 3 - \frac{3}{2}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4}i$.

Exercice n°6

a. $a = 5 \times \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$ et $b = 5 \times \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Donc $z = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$.

b. $a = 2 \times \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$ et $b = 2 \times \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2$. Donc $z = -2i$

Exercice n°7

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$.

2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+i)z_n| = |1+i| \times |z_n| = \sqrt{1^2 + 1^2} \times u_n = \sqrt{2}u_n$.
 (u_n) est donc bien une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3. Puisque (u_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\sqrt{2}$ on a $u_n = 2 \times (\sqrt{2})^n$.

4. $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice n°8

1. $\left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puis $\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$.

$$2. \quad r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z_n \right| = \left| \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n.$$

La suite (r_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3. \quad r_0 = |z_0| = 1.$$

$$\text{On a donc } r_n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

La distance entre les points A_n et A_{n+1} est déterminée par :

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - z_n| &= \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \times z_n - z_n \right| \\ &= \left| \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 \right) z_n \right| \\ &= \left| \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n \right| \\ &= \left| -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| \times |z_n| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2} \times |z_n| \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \end{aligned}$$