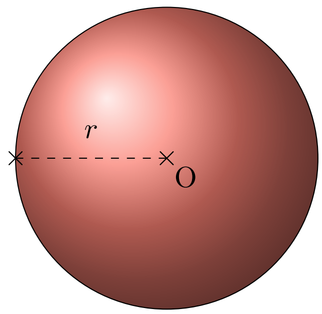
Équations paramétrique et cartésienne : approfondissement

Équation cartésienne d'une sphère

Soit $\mathrm{O}(x_{\mathrm{o}}\,;\,y_{\mathrm{o}}\,;\,z_{\mathrm{o}})$ un point de l'espace et soit r un réel strictement positif.
L'équation cartésienne de la sphère de centre O et de rayon r est :

$$(x-x_{\mathrm{o}})^2+(y-y_{\mathrm{o}})^2+(z-z_{\mathrm{o}})^2=r^2$$



Exercice n°1 Démonstration : Soit $\mathrm{O}(x_{\mathrm{o}}\,;\,y_{\mathrm{o}}\,;\,z_{\mathrm{o}})$ un point de l'espace et soit r un réel strictement positif.

1. Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ un point quelconque de l'espace. Déterminer la distance OM.
2. En déduire l'équation cartésienne de la sphère de centre O et de rayon r.

Exercice n°2

1. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $(7\,;\,-1\,;\,2)$ et de rayon 3.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\mathrm{O}(1\,;\,-2\,;\,4)$ et passant par $\mathrm{A}(-2\,;\,1\,;\,6)$.
3. Soit $\mathrm{A}(3\,;\,2\,;\,-1)$ et soit $\mathrm{B}(5\,;\,-2\,;\,3)$. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de diamètre AB.

Exercice n°3

Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-8x+8y+10z+8=0$.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. $\text{OM} = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$.

2. Une sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace dont la distance avec O vaut r.
   M appartient à cette sphère si et seulement si $\text{OM} = r$.
   Ce qui revient à $\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} = r$ ou encore $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$.

Exercice n°2

1. L'équation de la sphère de centre $(7\,;\,-1\,;\,2)$ et de rayon 3 est $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$.

2. $\text{OA} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - (-2))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{22}$.
   L'équation de la sphère de centre O et passant par A est donc $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 22$.

3. Le rayon de cette sphère est de $\dfrac{\text{AB}}{2}$.

   $$\frac{\text{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(5 - 3)^2 + (-2 - 2)^2 + (3 - (-1))^2}}{2} = 3.$$

   Le centre de cette sphère est le milieu de [AB] : notons-le I. On a $\text{I}\left(\dfrac{3 + 5}{2}\,;\,\dfrac{2 + (-2)}{2}\,;\,\dfrac{-1 + 3}{2}\right)$ ce qui donne $\text{I}(4\,;\,0\,;\,1)$.

   L'équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB] est donc $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$.

Exercice n°3

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8y + 10z + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 8x + y^2 + 8x + z^2 + 10z + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x - 4)^2 - 4^2 + (y + 4)^2 - 4^2 + (z + 5)^2 - 5^2 + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 5)^2 - 49 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 5)^2 = 49
\end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation de la sphère de centre $\text{O}(4\,;\,-4\,;\,-5)$ et de rayon 7.