

Nombre complexe : point de vue algébrique

1 L'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$

Définition : nombre complexe

Soient a et b deux nombres réels.

On appelle **nombre complexe** un nombre z s'écrivant sous la forme :

$$z = a + ib$$

où i est tel que $i^2 = -1$.

a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.

On note $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

La forme $z = a + ib$ d'un nombre complexe est appelée **forme algébrique**.

Définition : ensemble des nombres complexes

L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. Il contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Exemple

$z = 3 + 5i$ est un nombre complexe. Sa partie réelle vaut 3 et sa partie imaginaire vaut 5.

$z = 2 - 3i$ est un nombre complexe. Sa partie réelle vaut 2 et sa partie imaginaire vaut -3 .

π est un nombre complexe, sa partie imaginaire vaut 0.

Remarques

- Tous les nombres réels sont des nombres complexes dont la partie imaginaire vaut 0.
- Quand un nombre complexe est de la forme $z = ib$, de partie réel nulle, on parle d'imaginaire pur.
- On peut additionner, soustraire, multiplier deux nombres complexes. On peut également les diviser, à condition de ne pas diviser par 0.

Exemple

Soient $z = 3 + 5i$ et $z' = 2 - 3i$.

$$\begin{aligned} z + z' &= 3 + 5i + 2 - 3i \\ &= 5 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - z' &= 3 + 5i - (2 - 3i) \\ &= 1 + 8i \end{aligned}$$

Suite de l'exemple

$$\begin{aligned}
 z \times z' &= (3 + 5i)(2 - 3i) \\
 &= 3 \times 2 + 3 \times (-3i) + 5i \times 2 + 5i \times (-3i) \\
 &= 6 - 9i + 10i + 15 \\
 &= 21 + i
 \end{aligned}$$

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition : conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\bar{z} = a - ib$$

Il s'agit du nombre complexe ayant la même partie réelle que z mais dont la partie imaginaire est l'opposée de celle de z .

Propriété : conjugué et opérations

Soit z et z' deux nombres complexes. Soit n en entier naturel non nul.

$$\begin{array}{lll}
 (1) \quad \bar{\bar{z}} & (2) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} & (3) \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} \\
 (4) \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n & (5) \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} & (6) \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}
 \end{array}$$

Démonstration

Posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$(1) \quad \bar{\bar{z}} = \overline{a + ib} = \overline{a - ib} = a + ib = z.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \overline{z + z'} &= \overline{a + ib + a' + ib'} \\
 &= a + a' - i(b + b') \\
 &= a - ib + a - ib' \\
 &= \bar{z} + \bar{z'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \overline{z \times z'} &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} \\
 &= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'} \\
 &= \overline{aa' - bb' + i(ab' + ba')} \\
 &= aa' - bb' - i(ab' + ba') \\
 \text{et } \bar{z} \times \bar{z'} &= (a - ib)(a' - ib') \\
 &= (a - ib)(a' - ib') \\
 &= aa' - bb' - i(ab' + ba')
 \end{aligned}$$

On a donc bien $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

Suite des démonstrations

(4) **Initialisation** Triviale pour $n = 1$.

Hérédité Supposons que pour un entier $n \geq 1$ on ait $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\ &= \overline{z^n} \times \bar{z} \text{ d'après la propriété (3)} \\ &= \bar{z}^n \times \bar{z} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \bar{z}^{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour $n \geq 1$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(5) \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\text{et } \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

$$\text{On a donc bien } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

$$(6) \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Propriété : inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué. On a :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Propriété : inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué. On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

Exemple

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = 2 - 3i$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{3-5i}{9+25} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{3+5i}{2-3i} = \frac{(3+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-9+19i}{13} = \frac{-9}{13} + \frac{19}{13}i$$

3 Formule du binôme

Théorème : formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient deux nombres complexes a et b . On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Démonstration

Soit la propriété suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Initialisation Pour $n = 0$:

D'une part : $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part : $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité Supposons que pour un entier $n \geq 0$, la propriété soit vraie.

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k \quad \text{A l'aide de la relation de Pascal} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

Suite de la démonstration

La proposition est donc vraie au rang $n + 1$: elle est donc héréditaire.

Conclusion La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire pour $n \geq 0$. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n .

Exemple

On souhaite calculer, à l'aide du triangle de Pascal et de la formule du binôme $(2 - i)^4$.

$$\begin{aligned}(2 - i)^4 &= 2^4 + 4 \times 2^3 \times (-i) + 6 \times 2^2 \times (-i)^2 + 4 \times 2 \times (-i)^3 + (-i)^4 \\ &= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 \\ &= -7 - 24i\end{aligned}$$

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1